5°/ Posons $X=\frac{1}{x}$. Lorsque $x\to+\infty$ alors $X\to 0^+$ d'où

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{X\to 0^+}\frac{\sin X}{X}=1.$$

6°/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x^2)-\sin(ax)}{x-a}$.

Posons $h(x)=\sin(x^2)-\sin(ax)$. On a : $h(a)=0$ d'où :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x^2-\sin a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a)\ (\text{car } h \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}).$$

Or $h'(x)=2x\cos(x^2)-a\cos(ax)$ d'où $h'(a)=a\cos(a^2)$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}=a\cos(a^2)$.

Solution 5 :

1°/ • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{X\to 0^-}\dfrac{1}{X}\sin X=\lim\limits_{X\to 0^-}\dfrac{\sin X}{X}=1$

($X=\dfrac{1}{x}$, quand $x\to-\infty$ alors $X\to 0^-$).

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\cos(\frac{1}{x})-1)$. On pose $X=\dfrac{1}{x}$; quand

$x\to+\infty$ alors $X\to 0^+$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\cos(\frac{1}{x})-1\right]=\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{1}{X^2}(\cos X-1)=\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{\cos X-1}{X^2}=\dfrac{-1}{2}$.

2°/ $x\mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ (produit et composée de fonctions continues) alors f est continue sur $]-\infty,0[$.

• $x\mapsto -2x^2$ est continue sur $\mathbf{R}$ (fonction polynôme) donc f est continue sur $]0,\frac{1}{\pi}[$.